“Synchro with TrySail” を効率よく解きたかった

(｡•̀_•́｡)

2019 年 8 月 7 日

0　はじめに

ある日，目を覚まして TrySail の Portal Square を覗いてみると，次のような文言を発見した[*1].

> 「LAWSON presents TrySail Live Tour 2019 ”The TrySail Odyssey”」の開催を記念し、TrySail Portal Square にてツアー連動キャンペーンを開催いたします！
>
> **TrySail を探求せよ！ Synchro with TrySail**
>
> TrySail とあなたのシンクロ率を割り出します。
>
> 高いシンクロ率を出すと特製画像ゲット！
>
> シンクロ率 100 %の方の中から抽選で、「TrySail 2019 年オフィシャルスクールカレンダー」撮影で使用したサイン入りの傘をプレゼント。
>
> ツアー開催中 1 日 1 回ずつチャレンジできます。シンクロ率 100 %を目指して挑戦してみてください！
>
> さあ、あなたは何回でシンクロ率 100 %を叩き出せるでしょうか？

上の文面にもあるように，開催期間は「ツアー開催中」である．先日，2019/8/4(日)，幕張メッセで開催された TrySail ライブツアーの千秋楽が終わった．最高だった．詳細を語ると長くなるので，今後発売されるライブ BD をお買い求めの上，それを観て雰囲気を知ってもらうことを読者への課題とする．

ともかく，ライブツアーが終わってしまったので，この “Synchro with TrySail” のキャンペーンも終了である．期限も切れたことだし，全員のシンクロ率を 100 % にするまでに試した「効率の良い」探索方法を提示しても問題なかろう (開始から 30 日ほどで終わった)．この pdf ではその詳細を述べる．

1　今回解きたい問題

まずは，前セクションで説明せず使っていた用語を説明し，その後に今回扱う問題のルールを説明する．

[*1] https://trysail.jp/contents/221592

定義 1　以下に各用語の定義を示す．

1. **TrySail(トライセイル)** とは，ミュージックレインに所属する 3 人の女性声優: 麻倉もも (あさくら もも)，雨宮天 (あまみや そら)，夏川椎菜 (なつかわ しいな) で構成される声優ユニットである．
2. **TrySail Portal Square** とは，TrySail のオフィシャルサイトである．月額有料会員コースが存在し，これに登録することで会員特典を享受することができる．コースには月額 300 円と 500 円のものが存在し，ここではそれぞれ「300 円会員」「500 円会員」と呼ぶことにする[*2]．
3. **LAWSON presents TrySail Live Tour 2019 "The TrySail Odyssey"**，または単に **The TrySail Odyssey** とは，2019/2/23(土) から 2019/8/4(日) の間に開催されていた TrySail の 3 度目の全国ツアーの名称である．

以下，今回の考察の対象である「Synchro with TrySail」のルールについて説明する．

定義 2 (ゲームのルール)

TrySail を探求せよ！ Synchro with TrySail，または単に **Synchro with TrySail** とは，以下のルールで定義されるゲームである:

1. 参加資格を有するのは 500 円会員のみで，解答 (後述) は 1 日 1 回のみ可能である (毎日 a.m. 0:00 に解答権が復活する)．参加資格を有する会員を**プレイヤー**と呼ぶことにする．
2. プレイヤーは，20 個の 2 択問題から構成されている**問題**に答える[*3]．20 個の 2 択問題に答えたものを**解答**と呼び，解答を提出する行為を単に**解答する**という．
3. 問題に解答すると，プレイヤーは自身が提出した解答が出題者側が用意した**正答**とどれほど一致しているか，すなわち**正答率**を得る．

なお，問題は TrySail のメンバーそれぞれについて与えられる．つまり，問題は計 3 問ある．ただし，あるメンバーの問題に解答した日は別メンバーの問題に解答することはできない．すなわち，ここでも「1 日 1 回」の制約が効いてくる．

ちなみに問題の内容は，たとえば雨宮さんについての「いたずらをするのが好き?それともされがち?」とか，麻倉さんについての「自転車とスプーン曲げだったらどっちが得意?[*4]」など，過去のメンバーの発言や言動を知っていれば答えられるような質問が多くを占めており，「完全な当てずっぽう」に頼らねばならないというわけではないことを指摘しておく．

[*2] 当然ではあるが，300 円会員が閲覧可能なものは 500 円会員も見れるし，300 円会員の特典は非会員に毛が生えたようなものなので登録するなら 500 円会員がよいと思う (回し者発言)．詳細は `https://trysail.jp/about/membership`．

[*3] 公式では「シンクロ」と称しているが，ここでは「問題」と呼ぶことにする．

[*4] 冷静に考えると意味不明な 2 択だが，ファンならわかる (はず)．

2　問題の考察

2.1　抽象化

以下では，定義 2 で示したルールを数理的に扱えるように抽象化する．問題を構成する 2 択問題の数も 20 問から N 問に拡張する．また，(簡単のために) 実数体 $\mathbb{R}$ 上の線形代数を考える．

> **定義 3** (解答ベクトル・正答ベクトル，(要素単位の) 正解・不正解)
>
> 計 N 問の 2 択問題の解答を並べたベクトル $\boldsymbol{a} \in \{0,1\}^N \subset \mathbb{R}^N$ を**解答ベクトル**，あるいは単に**解答**と呼び，同様に正解に対応するベクトル $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^N$ を**正答ベクトル**，あるいは単に**正答**と呼ぶ．
>
> また，解答 $\boldsymbol{a}$ の第 i 要素が正答 $\boldsymbol{x}$ の第 i 要素と一致することを，第 i 要素は**正解**であるなどと言い，そうでない場合は**不正解**であるなどと表現することとする．

このように各要素は 0 か 1 のどちらかであるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ を定義し，これらを用いて議論をすすめる．我々の目標は，正答を $\boldsymbol{x} = (x^{(1)}, \cdots, x^{(N)})$，解答を $\boldsymbol{a} = (a^{(1)}, \cdots, a^{(N)})$ としたとき，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$$

となるような $\boldsymbol{a}$ を探すことである．ただし，解答することで得られる情報は「$\boldsymbol{a}$ の正答率」，すなわち

$$x^{(k)} = a^{(k)} \ (k \in \{1, \cdots, N\}) \text{ となるような要素の個数と } N \text{ の比}$$

のみである．「正答率」のままでは少し扱いにくいので，N で割る前の**正答数**を考える．ちなみに正答数 n は

$$n = N - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \tag{1}$$

で与えられるが，今回はこの表示は特に利用しない (参考までに示した)．なお，$\bullet^\top$ は転置記号である．

2.2　具体例を解いてみる

さて，以下では実際に具体例を用いて問題を解いてみる．その前に今後使う記号を定義する．

> **定義 4**　以下で各記号を定義する．
>
> 1. 各要素が 0 か 1 のどちらかである 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \{0,1\}^N$ に対して，要素ごとの排他的論理和を $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}$ と書く．たとえば $N = 4, \boldsymbol{a} = (0,0,1,1)^\top, \boldsymbol{b} = (0,1,0,1)^\top$ のとき，$\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a} = (0,1,1,0)^\top$ となる．
> 2. $\mathbf{1}_k$ を，すべての要素が 1 の k 次元縦ベクトル: $\mathbf{1}_k = (\overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{k\text{ 個}})^\top$ とする．

ここでは $N = 5$ とし，正答を

$$\boldsymbol{x} = (0, 1, 1, 0, 0)^\top$$

とする．正答を未知とし，いくつか解答 $\boldsymbol{a}$ を与え，それに対応する正答率 n を得る[*5]．m 回解答した場合は，

[*5] 正答数 n は正答 $\boldsymbol{x}$ を知っている第三者からしか得られない情報なので，ここでは「天与のもの」と扱われる．

これらを添字付けて $(\boldsymbol{a}_0, n_0), \cdots, (\boldsymbol{a}_{m-1}, n_{m-1})$ とする．

まず解答 $\boldsymbol{a}_0$ をひとつ決め，これを修正して正答を推定することを考える．すなわち，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_0 \oplus \boldsymbol{c} \tag{2}$$

となる $\boldsymbol{c} = (c_1, \cdots, c_N) \in \{0,1\}^N$ を探すことを目標とする．$\boldsymbol{c}$ の取り方から，

$$c_i = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{a}_0 \text{ の第 } i \text{ 要素が}\underline{\text{不正解}}\text{である}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である．今後 $\boldsymbol{c}$ と言ったら，式 2 を満たす $\boldsymbol{c}$ のことを指すこととする．

実際に $\boldsymbol{x}$ の特定をしてみる．ここではひとまず

$$\boldsymbol{a}_0 = (1,0,1,0,1)^\top$$

としてみる．すると (出題者から)$n_0 = 2$ を得る．すなわち，$\boldsymbol{a}_0$ には 3 つ不正解の要素があるので，$\boldsymbol{c}$ は

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 3 \tag{3}$$

を満たす．定義 4 で定めた記号を用いて，より一般的な形で書くと，

$$\boldsymbol{1}_N^\top \boldsymbol{c} = N - n_0 \tag{4}$$

となる．今後は$\boldsymbol{a}_0$ の解答をいくつか変更したものを新たな解答とする．たとえば 3 箇所だけ変更して

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,0,0,1,0)^\top$$

としてみると，$n_1 = 1$ を得る．

ここで$\boldsymbol{a}_1$ の $\boldsymbol{a}_0$ に対する変更箇所に注目する．今回の例では第 3,4,5 要素の 3 箇所を変更したが，この箇所の中に，変更した結果，正解だったものが不正解になった箇所，またはその逆がいくつ含まれているかを以下の手順で求めることができる:

1. $\boldsymbol{a}_0$ から $\boldsymbol{a}_1$ に変更した結果, 正解 → 不正解となった箇所の数, つまり変更前では正解だった箇所の数を r_1 とする．同様に変更前では不正解だった箇所の数を w_1 とする．
2. $r_1 + w_1$ は「$\boldsymbol{a}_0$ から $\boldsymbol{a}_1$ に変更した要素の個数」に一致する．今回の例では 3 箇所変更したので,
$$r_1 + w_1 = 3 \tag{5}$$
となる．
3. $\boldsymbol{a}_0$ の正答数 n_0 に，変更前は正解だった箇所の数 ($\boldsymbol{a}_1$ では不正解)r_1 を引き，不正解だった箇所 ($\boldsymbol{a}_1$ では正解)w_1 を足せば $\boldsymbol{a}_1$ の正答数 n_1 を得る．すなわち，
$$n_0 - r_1 + w_1 = n_1 \qquad \therefore -r_1 + w_1 = -1 \tag{6}$$
となる．ただし，ここで $n_0 = 2,\ n_1 = 1$ を代入した．
4. こうして得られた式 5 と式 6 を連立することで r_1, w_1 を求められる．今回は $r_1 = 2,\ w_1 = 1$ となる．

以上のことから，$\boldsymbol{a}_0$ の第 3,4,5 要素の 3 箇所の中に，正解の箇所が $r_1(=2)$ 個あり，不正解の箇所が $w_1(=1)$

個あることが突き止められる．特に w_1 の情報から，$\boldsymbol{c}$ の要素について

$$c_3 + c_4 + c_5 = 1 \tag{7}$$

であることがわかる．ここで $\boldsymbol{a}_0$ からの変更箇所は，両者の排他的論理和を取れば

$$\boldsymbol{a}_1 \oplus \boldsymbol{a}_0 = (0, 0, 1, 1, 1)^\top$$

となり，変更した部分に対応する要素が 1 となるベクトルが得られることを用いて一般化すると，

$$(\boldsymbol{a}_k \oplus \boldsymbol{a}_0)^\top \boldsymbol{c} = w_k \tag{8}$$

と書ける $(k = 1, \cdots, m-1)$．さらに，手順中の式 5 についても同様にして，

$$(\boldsymbol{a}_k \oplus \boldsymbol{a}_0)^\top \mathbf{1}_N = r_k + w_k \tag{9}$$

と表すことができる (今回の例では $\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_5 = (1, 1, 1, 1, 1)^\top$ なのだった)．ついでに式 6 も一般化する:

$$-r_k + w_k = n_k - n_0 \quad (k = 1, \cdots, m-1) \tag{10}$$

この調子で (?) 3 回目の解答もしてみる．

$$\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1, 1, 1)^\top$$

としてみると $n_2 = 1$ を得る．このとき $\boldsymbol{a}_2 \oplus \boldsymbol{a}_0 = (0, 0, 0, 1, 0)^\top$ となるので，式 8 と式 9 から，

$$(\boldsymbol{a}_2 \oplus \boldsymbol{a}_0)^\top \boldsymbol{c} = c_4 = w_2, \qquad (\boldsymbol{a}_2 \oplus \boldsymbol{a}_0)^\top \mathbf{1}_N = 1 = r_2 + w_2$$

となり，また式 10 から $n_2 - n_0 = -1 = -r_2 + w_2$ なので，以上から

$$c_4 = 0 \tag{11}$$

と求められる．

とっちらかってきたので，ここで結果をまとめると，

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 3 & (3) \\ \qquad\quad\;\; c_3 + c_4 + c_5 = 1 & (7) \\ \qquad\qquad\quad\;\; c_4 \qquad\; = 0 & (11) \end{cases}$$

であるが，これらを連立して解くと，$\boldsymbol{c}$ の候補 $\widehat{\boldsymbol{c}}$ は

$$\widehat{\boldsymbol{c}} = (1, 1, 1, 0, 0)^\top, (1, 1, 0, 0, 1)^\top$$

の 2 つのみである．それぞれに対応する $\boldsymbol{x}$ の候補 $\widehat{\boldsymbol{x}}$ を式 2 から求めると，

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = (0, 1, 0, 0, 1)^\top, (0, 1, 1, 0, 0)^\top$$

のいずれかであるとわかる．ここまでくれば，正答 $\boldsymbol{x} = (0, 1, 1, 0, 0)^\top$ まで行き着くことは容易である．

3　一般的な解法の導出

3.1　行列表示

扱いやすいように行列表示する．式 10 を行列表示すると，

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 + w_1 \\ -r_2 + w_2 \\ \vdots \\ -r_{m-1} + w_{m-1} \end{pmatrix} \tag{12}$$

となる．式 4 と式 8 は，

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1}_N^\top \\ (\boldsymbol{a}_1 \oplus \boldsymbol{a}_0)^\top \\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_{m-1} \oplus \boldsymbol{a}_0)^\top \end{pmatrix}}_{A} \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} N - n_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{m-1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

と 1 つの式にまとめることができる．式 9 についても同様に行列を用いて書くが，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_N^\top \\ (\boldsymbol{a}_1 \oplus \boldsymbol{a}_0)^\top \\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_{m-1} \oplus \boldsymbol{a}_0)^\top \end{pmatrix} \mathbf{1}_N = \begin{pmatrix} N \\ r_1 + w_1 \\ \vdots \\ r_{m-1} + w_{m-1} \end{pmatrix} \tag{14}$$

とすれば，式 13 で登場した $m \times N$ の行列 A を再利用できる．ここで，

$$r_0 := n_0, \qquad w_0 := N - n_0$$

と形式的において，$\boldsymbol{r} = (r_0, r_1, \cdots, r_{m-1})$, $\boldsymbol{w} = (w_0, w_1, \cdots, w_{m-1})$ とすれば，式 13 および式 14 は

$$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{w} \tag{15}$$

$$A\mathbf{1}_N = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{w} \tag{16}$$

と簡潔に書くことができる．この $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{w}$ を使うために式 12 を変形すると，$-r_0 + w_0 = N - 2n_0$ であるから，

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{m-1} \end{pmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{n}}} = K\tilde{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{r} + \boldsymbol{w}$$

とかける．以上のことをまとめると，以下のようになる:

命題 1

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_N^\top \\ (\boldsymbol{a}_1 \oplus \boldsymbol{a}_0)^\top \\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_{m-1} \oplus \boldsymbol{a}_0)^\top \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} N & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = (r_0, r_1, \cdots, r_{m-1})^\top, \boldsymbol{w} = (w_0, w_1, \cdots, w_{m-1})^\top, \tilde{\boldsymbol{n}} = (1, n_0, \cdots, n_{m-1})^\top$$

とおくと (K は $m \times (m+1)$ 行列),

$$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{w}, \quad A\mathbf{1}_N = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{w}, \quad K\tilde{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{r} + \boldsymbol{w}$$

が成立する.

以上の関係式から

$$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\left(A\mathbf{1}_N + K\tilde{\boldsymbol{n}}\right) \tag{17}$$

が導かれるが，A は解答 $\boldsymbol{a}_k$，$\tilde{\boldsymbol{n}}$ は正答率 n_k がわかれば計算できるので，結局

$$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{w}$$

は $\boldsymbol{c}$ のみが未知である単純な線形方程式になる.

3.2　解答候補の選び方の概要

式 13 を $\boldsymbol{c}$ について解いて，式 2 を用いれば正答の候補が求められる……のだが，$\boldsymbol{c}$ には「各要素が 0 か 1 のどちらか」という制約がついており，ここの上手い処理が思いつかなかったので，結局 $\boldsymbol{c}$ を 2^{20} 通り試して解を求めた．しかし $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{w}$ という関係式が得られたので，「既知の情報と被らない解答の仕方」の判定基準は得られた．以下で説明する.

$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{w}$ を満たす $\boldsymbol{c} \in \{0,1\}^N \subset \mathbb{R}^N$ をすべて集めた集合を S とする．$\boldsymbol{c}_0 \in S$ をひとつ取ると，

$$S \subset \{\boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{c}' \mid \boldsymbol{c}' \in \ker A\}$$

を満たす．したがって，$\ker A$ を小さくすれば S の解も絞り込むことができる．一方で次元定理より

$$\dim \ker A = N - \operatorname{rank} A$$

であるから，$\operatorname{rank} A$ を大きくすれば $\ker A$ の次元は落ち，したがって S の要素数も減って $\boldsymbol{c}$ の候補が絞り込まれる．そこで $\operatorname{rank} A$ が増えるように解答してやればよい ($A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{w}$ の解のひとつ $\widehat{\boldsymbol{c}}$ を使って，新たな解答を $\boldsymbol{a}' = \widehat{\boldsymbol{c}} \oplus \boldsymbol{a}_0$ とすればいい気がするが……?).

4　おわりに

一応こんな感じで絞り込むことができた．排他的論理和 $\oplus$ をいい感じに処理できず，構造が見えにくくなってしまっているのが難点なような気がする (上手い方法などあれば教えていただきたい)．また，最後の方は時間とやる気の都合上，数学的な吟味はしなかったが，また余裕ができたら追記でもしようかと思う．

結局 $\boldsymbol{c}$ を総当りでぶつけて候補をリストアップしても $N = 20$ なら $2^{20} \approx 10^6$ なので現実的な時間で総当りは終えられたが，もっと問題数が増えると指数的に計算時間が増大するのですぐに破綻しそうである．$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{w}$ の解空間の構造をうまいこと利用すれば賢く $\boldsymbol{c}$ を求められそうだが……．

とにかく，おわりだよ〜(●・▽・●)